Основные определения, теоремы и формулы планиметрии.

Обозначения:

△ABC — треугольник с вершинами A, B, C. a = BC, b = AC, c = AB — его стороны, соответственно, медиана, биссектриса, высота, проведенные к стороне a, P - периметр,

$p = \frac{P}{2}$ — полупериметр, R и r — радиусы соответственно описанном и вписанной окружностей.

S -- площадь фигуры, d_1,d_2 -— диагонали четырехугольника,

$(\widehat{a, b})$ — угол между прямыми a и b;

$\parallel, \perp, \sim$ — знаки, параллельности, перпендикулярности, подобия соответственно.

О — определение, Т — теорема.

Т—1. (Признаки параллельности прямых, рис. (6).

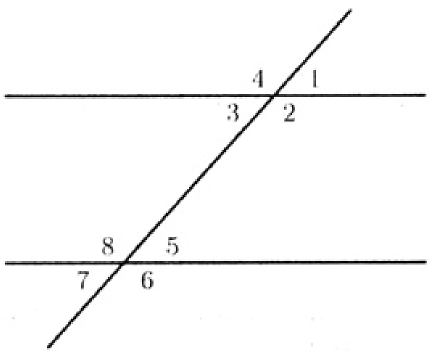


Рис. 6

Две прямые параллельны, если:

- внутренние накрест лежащие углы равны: < 3 = < 5;
- внешние накрест лежащие УГЛЫ равны: < 1 = < 7;
- соответственные углы равны: <1 = < 5;
- сумма внутренних односторонних углов равна 180°: < 2 + < 5= 180°;
- сумма внешних односторонних углов равна 180°: < 1 + < 6 = 180°.
-

О-1. △$A_1B_1C_1$', ~ △ABC (k - коэффициент подобия), если их стороны пропорциональны, а соотиетствепныг углы равны (рис. 7):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k.$$
$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1.$$

Т—2 (признаки подобия). Два треугольника подобны, если:

- дня угла одного △ равны двум углам другого △;
- дне стороны одного △ пропорциональны двум сторонам другого △, а углы, заключенные между этими сторонами, равны;
- три стороны одного △ пропорциональны трем сторонам другого △.

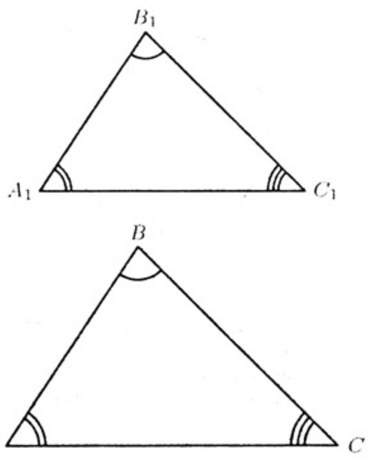


Рис. 7

Т—3. В подобных треугольниках пропорциональны все их линейные элементы (с одним и тем же k): стороны, медианы, биссектрисы, высоты, радиусы вписанных и описанных окружностей и пр.

Т—4 (Фалеса). Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки (рис. 8):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots$$

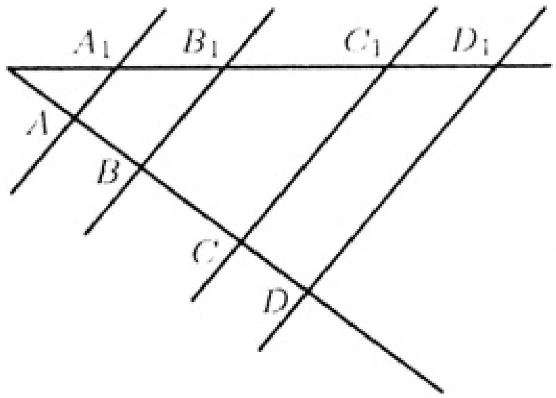


Рис. 8

Т—5. Сумма углов треугольника равна 180°.

Т—6. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану на части в отношении 2 : 1, считая от вершины (см. рис. 9):

$AO : DO = 2 : 1.$

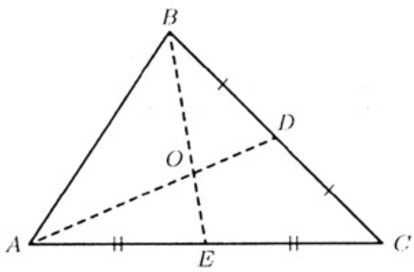


Рис. 9

Т—7. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине (рис. 10):

$$MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}.$$

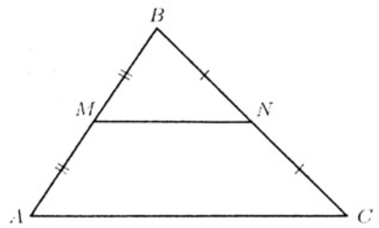


Рис. 10

Т—8. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

BD : CD = AB : AC (см. рис. 11).

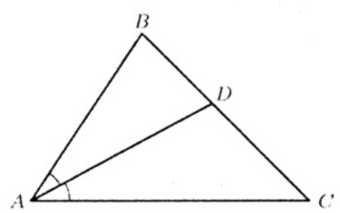


Рис. 11

<u>Т—9</u>. Вписанный угол (образованный двумя хордами, исходящими из одной. точки окружности) измеряется половиной дуги, на которую он ,опирается (рис. 12):

$\angle ACB = \smile AB : 2.$

<u>Т-10</u>. Центральный угол, образованный двумя радиусами окружности, измеряется дугой, на которую он опирается (см. рис. 12):

$\angle AOB = \smile AB$

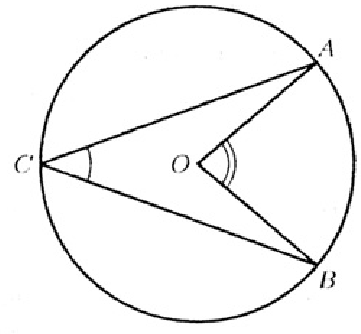


Рис. 12

<u>Т—11</u>. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами (рис. 13):

$\angle ABC = \smile AmB : 2.$

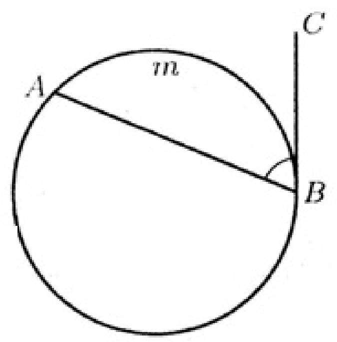


Рис. 13

<u>Т—12</u>. Угол между двумя секущими с вершиной вне окружности измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами (рис. 14):

$\angle AMC = (\smile AC - \smile BD) : 2.$

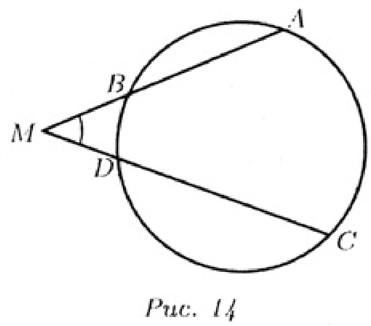


Рис. 14

<u>Т—13</u>. Касательные, проведенные к окружности из общей точки, расположенной вне окружности, равны: В А = ВС. Угол между двумя касательными (описанный угол) измеряется полуразностью большей, и меньшей дуг, заключенных между точками касания (рис. 15):

$\angle ABC = (\smile AmC - \smile AnC) : 2.$

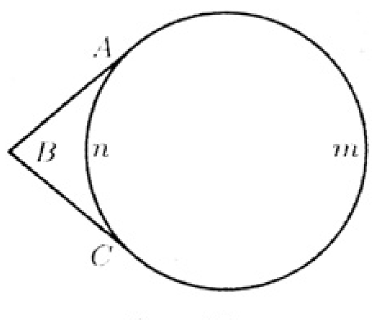


Рис. 15

<u>Т—14</u>. Угол между двумя хордами с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, другая — между их продолжениями (рис. 16):

$$\angle AOC = (\smile AC - \smile BD) : 2.$$

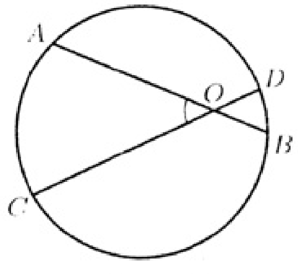


Рис. 16

<u>Т—15</u>. Если две хорды пересекаются внутри круги, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (см. рис. 16):

AO • OB = CO • OD.

<u>Т—16</u>. Если из точки вне круга проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению отрезка секущей на ее внешнюю часть (рис. 17):

$$MA^2 = MC \cdot MB.$$

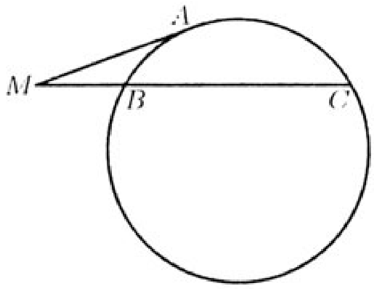
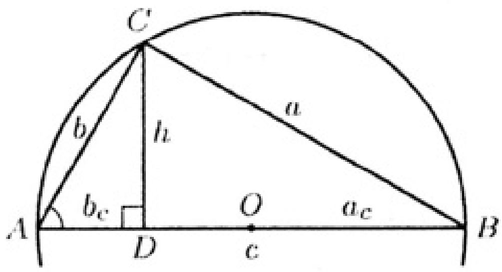


Рис. 17

<u>Т—17</u>. В прямоугольном треугольнике (a, b -- катеты, с — гипотенуза. h — высота, опущенная на гипотенузу, a_c, b_c — проекции катетов па гипотенузу) имеют место (рис. 18):



1. формула Пифагора:
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. формулы

$$a^2 = c \cdot a_c,$$
$$b^2 = c \cdot b_c,$$
$$h^2 = a_c \cdot b_c;$$

3. определение тригонометрических величин (функций) острых углов:

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c},$$
$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c},$$
$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b},$$
$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$$

4. формулы решения прямоугольного треугольника:

$$a = c\sin A = c\cos B = b\operatorname{tg} A = b\operatorname{ctg} B,$$
$$b = c\cos A = c\sin B = a\operatorname{ctg} A = a\operatorname{tg} B,$$
$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B};$$

5. центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы и

$$R = \frac{c}{2}$$

<u>Т—18</u> (теорема синусов).

В произвольном треугольнике (рис. 19)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

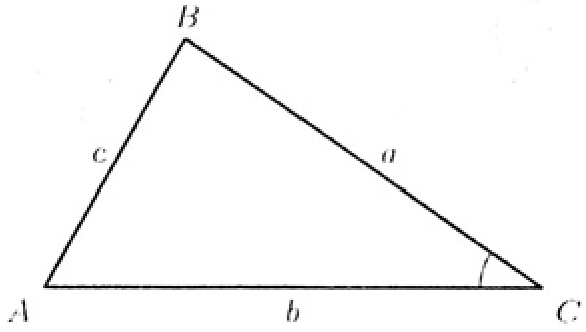


Рис. 19

<u>Т-19</u> (теорема косинусов).

В произвольном треугольнике (рис. 19):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

<u>Т—20</u>. Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

<u>Т—21</u>. Центр окружности, описанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Радиус окружности перпендикулярен стороне угла и точке касания. Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

<u>Т—22</u>. Центр окружности, описанной около треугольника, расположен в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

<u>Т—23</u>. В описанном около окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. В частности, если равнобочная трапеция описана около окружности, то ее средняя линия равна боковой стороне.

<u>Т—24</u>. Во вписанном в окружность четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180°.

<u>Т—25</u>. Площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} =$$
$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr = \frac{abc}{4R} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Т—26. В правильном треугольнике со стороной а:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Т—27. В правильном n-угольнике (a_n — сторона n-угольника, R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружности):

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$
$$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n},$$
$$S = \frac{n \cdot a_n \cdot r}{2}.$$

Т—28. Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

О-2. Две фигуры называются равновеликими, если их площади одинаковы.

Т—29. Медиана делит треугольник на две равновеликие части. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей. Отрезки, соединяющие точку пересечения медиан с вершинами, делят треугольник на три равновеликие части.

Т—30. В произвольном треугольнике длина медианы вычисляется следующим образом (рис. 19):

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

Т—31. **Формулы площадей четырехугольников**:

• *квадрата со стороной* а:

$$S = a^2;$$

• *прямоугольника со сторонами* н. н li:

$$S = a \cdot b;$$

• *параллелограмма со сторонами a и b:*

$$S = ab\sin(\widehat{a, b}) = ah_a;$$

• *ромба со стороной a и острым углом* α *между сторонами*:

$$S = a^2\sin\alpha = ah_a = \frac{1}{2}d_1d_2;$$

• *трапеции с основаниями a и b*:

$$S = \frac{a+b}{2}h;$$

• *выпуклого четырехугольника:*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\widehat{d_1 d_2}), \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

если $d_1 \perp d_2$.

<u>Т-32</u>. Другие формулы:

• *площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса* r:

$$S = p \cdot r;$$

• *площадь круга радиуса* R:

$$S = \pi R^2;$$

• *площадь сектора раствора* α ° (γ *рад*):

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha^\circ = \frac{\gamma}{2} R^2;$$

• *длина окружности радиуса R:*

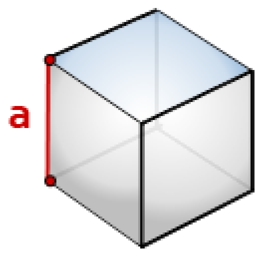
$$L = 2\pi R;$$

• *длина дуги и* α ° *или* γ *рад*:

$$L = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} = \gamma \cdot R.$$

Все формулы площади поверхности объемных тел

Площадь полной поверхности куба

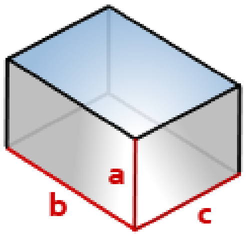


a - сторона куба

Формула площади поверхности куба, (**S**):

$$\boxed{S = 6a^2}$$

Найти площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда

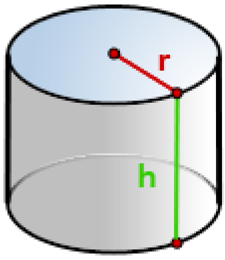


a, **b**, **c**,- стороны параллелепипеда

Формула площади поверхности параллелепипеда, (**S**):

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

Расчет площади поверхности цилиндра



r- радиус основания
h- высота цилиндра
π ≈ 3.14

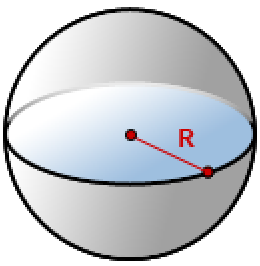
Формула площади боковой поверхности цилиндра, ($\mathbf{S_{бок}}$):

$$S_{бок} = 2\pi r h$$

Формула площади всей поверхности цилиндра, (**S**):

$$S = 2\pi r(h + r)$$

Найти площадь поверхности шара, формула

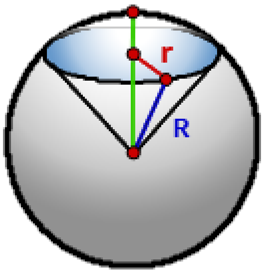


R - радиус сферы
π ≈ 3.14

Формула площади поверхности шара (**S**):

$$S = 4\pi R^2$$

Площадь поверхности шарового сектора

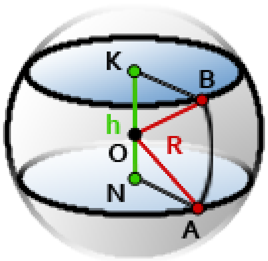


R - радиус шара
r - радиус основания конуса = радиус сегмента
π ≈ 3.14

Формула площади поверхности шарового сектора, (**S**):

$$S = 2\pi R\left(R + \frac{r}{2} - \sqrt{R^2 - r^2}\right)$$

Площадь поверхности шарового слоя

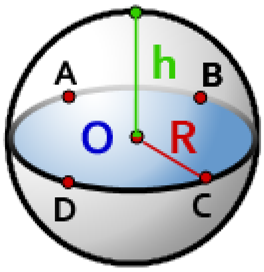


h - высота шарового слоя, отрезок *KN*
R - радиус самого шара
O - центр шара
π ≈ 3.14

Формула площади боковой поверхности шарового слоя, (**S**):

$$S = 2\pi Rh$$

Площадь поверхности шарового сегмента



Шаровый сегмент- это часть шара отсеченная плоскостью. В данном примере, плоскостью **ABCD**.

R - радиус самого шара

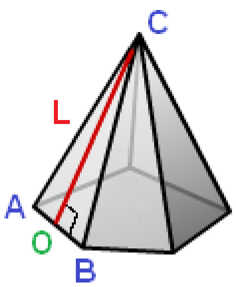
h - высота сегмента

$\pi \approx 3.14$

Формула площади поверхности шарового сегмента, (**S**):

$$S = 2\pi R h$$

Площадь поверхности правильной пирамиды через апофему



L - апофема (опущенный перпендикуляр **OC** из вершины **C**, на ребро основания **AB**)

P- периметр основания

$S_{осн}$ - площадь основания

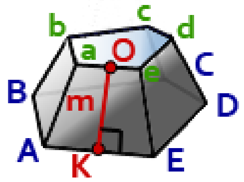
Формула площади боковой поверхности правильной пирамиды (**$S_{бок}$**):

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P L$$

Формула площади полной поверхности правильной пирамиды (**S**):

$$S = \frac{1}{2} P L + S_{осн}$$

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

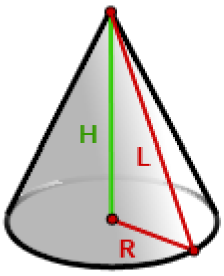


m - апофема пирамиды, отрезок**OK**
P - периметр нижнего основания,**ABCDE**
p - периметр верхнего основания,**abcde**

Формула площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, (**S**):

$$S = \frac{m}{2}(P + p)$$

Площадь поверхности прямого, кругового конуса



R - радиус основания конуса
H - высота
L - образующая конуса
$\pi \approx 3.14$
Формула площади боковой поверхности конуса, через радиус (**R**) и образующую (**L**), ($S_{бок}$):

$$S_{бок} = \pi RL$$

Формула площади боковой поверхности конуса, через радиус (**R**) и высоту (**H**), ($S_{бок}$):

$$S_{бок} = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$$

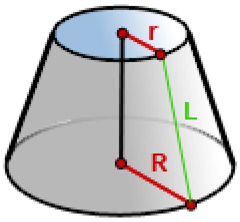
Формула площади полной поверхности конуса, через радиус (**R**) и образующую (**L**), (**S**):

$$S = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R)$$

Формула площади полной поверхности конуса, через радиус (**R**) и высоту (**H**), (**S**):

$$S = \pi R\left(R + \sqrt{R^2 + H^2}\right)$$

Формулы площади поверхности усеченного конуса



R - радиус нижнего основания
r- радиус верхнего основания
L - образующая усеченного конуса
$\pi \approx 3.14$

Формула площади боковой поверхности усеченного конуса, (**$S_{бок}$**):

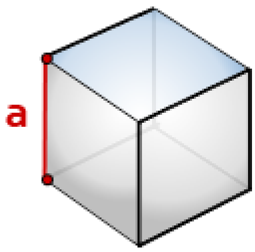
$$S_{бок} = \pi L(R + r)$$

Формула площади полной поверхности усеченного конуса, (**S**):

$$S = \pi(LR + Lr + R^2 + r^2)$$

Все формулы объема геометрических тел

Расчет объема куба

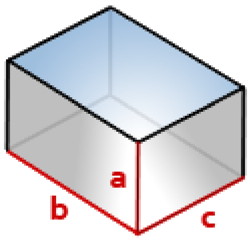


a - сторона куба

Формула объема куба, (*V*):

$$V = a^3$$

Объем прямоугольного параллелепипеда

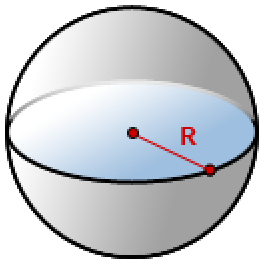


a, **b**, **c**- стороны параллелепипеда

Формула объема параллелепипеда, (**V**):

$$V=abc$$

Формула вычисления объема шара

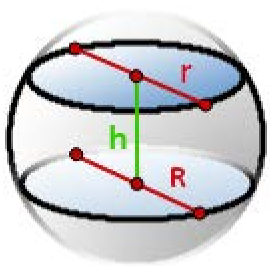


R- радиус шара
$\pi \approx 3{,}14$

Объем шара, (**V**):

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Объем шарового слоя

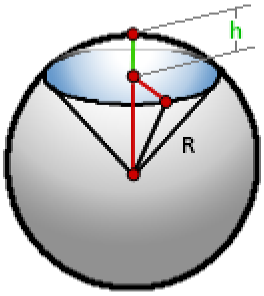


h- высота шарового слоя
R- радиус нижнего основания
r- радиус верхнего основания
$\pi \approx 3{,}14$

Объем шарового слоя, (**V**):

$$V = \frac{1}{2}\pi h\left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$

Объем шарового сектора

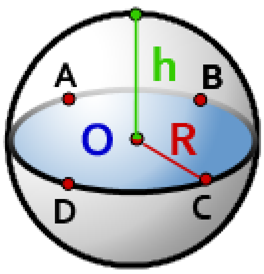


h - высота сегмента
R - радиус шара
$\pi \approx 3{,}14$

Объем шарового сектора, (**V**):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Объем шарового сегмента, формула

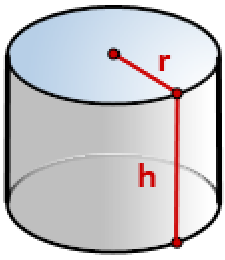


Шаровый сегмент- это часть шара отсеченная плоскостью. В данном примере, плоскостью ABCD.
R - радиус шара
h - высота сегмента
$\pi \approx 3{,}14$

Объем шарового сегмента, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

Как вычислить объем цилиндра ?

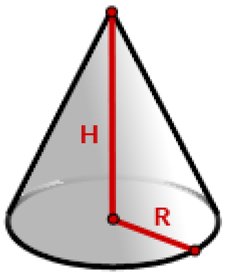


h- высота цилиндра
r- радиус основания
$\pi \approx 3{,}14$

Объем цилиндра, (**V**):

$$V=\pi r^2 h$$

Как найти объем конуса ?

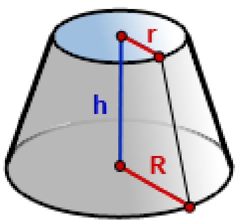


H- высота конуса
R- радиус основания
$\pi \approx 3{,}14$

Объем конуса, (**V**):

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Формула объема усеченного конуса

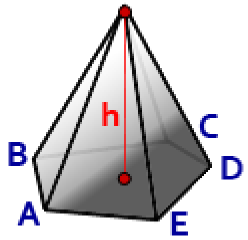


R- радиус нижнего основания
r- радиус верхнего основания
h- высота конуса
$\pi \approx 3{,}14$

Объем усеченного конуса, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2)$$

Расчет объема пирамиды

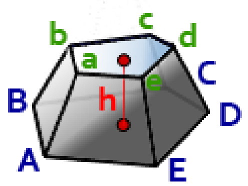


h - высота пирамиды
S - площадь основания **ABCDE**

Объем пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

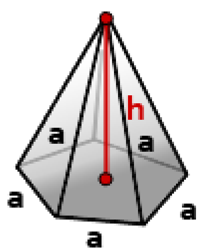
Расчёт объёма усечённой пирамиды



h - высота пирамиды
$\mathbf{S}_{\text{ниж}}$ - площадь нижнего основания, **ABCDE**
$\mathbf{S}_{\text{верх}}$ - площадь верхнего основания, **abcde**
Объем усеченной пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}h(S_{\text{ниж}} + \sqrt{S_{\text{ниж}} S_{\text{верх}}} + S_{\text{верх}})$$

Найти объем правильной пирамиды

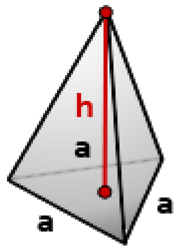


Пирамида в основании, которой лежит правильный многоугольник и грани равные треугольники, называется правильной.
h - высота пирамиды
a - сторона основания пирамиды
n - количество сторон многоугольника в основании

Объем правильной пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{na^2h}{12\ \mathrm{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Объем правильной треугольной пирамиды

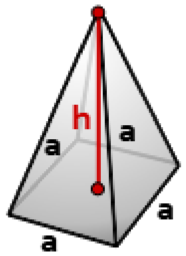


Пирамида, у которой основание равносторонний треугольник и грани равные, равнобедренные треугольники, называется правильной треугольной пирамидой.
h - высота пирамиды
a - сторона основания

Объем правильной треугольной пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{ha^2}{4\sqrt{3}}$$

Объем правильной четырехугольной пирамиды

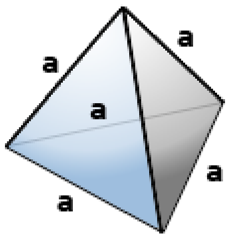


Пирамида, у которой основание квадрат и грани равные, равнобедренные треугольники, называется правильной четырехугольной пирамидой.
h - высота пирамиды
a - сторона основания

Объем правильной четырехугольной пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}ha^2$$

Объем правильного тетраэдра



Правильный тетраэдр- пирамида у которой все грани, равносторонние треугольники.
a -ребро тетраэдра

Объем правильного тетраэдра (**V**):

$$\boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$